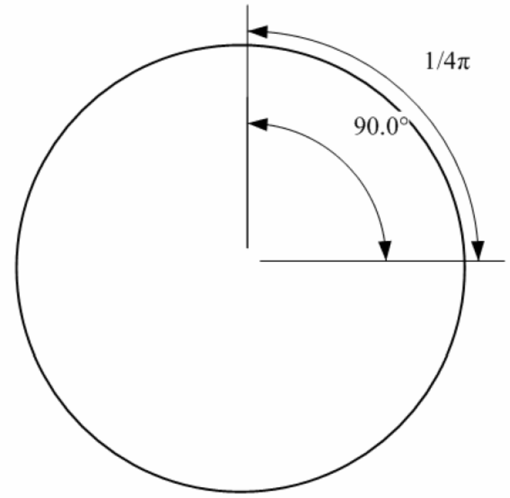
第三章 三角函數

- 度與弧
  - 角度定義
  - 弧度定義
  - 弧度與角度的互化
  - 有向角與同界角
- 三角函數基本性質
  - 基本函數
  - 銳角三角函數
  - 廣義三角函數
- 三角函數特性
  - 三角函數週期圖形
- 複角三角函數
  - 複角三角函數
  - 倍角公式
  - 半角公式
  - 和差化積、積化和差

度與弧



- 角度定義

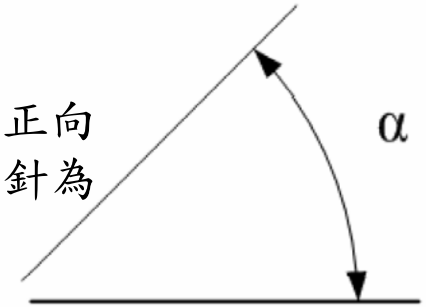
  角度是用以量度角的單位，符號為 “ ° “ 。一圓周角分為360 等份，每份定義為1 度(1°)。
- 弧度定義

  弧度又稱弳度，在數學和物理中是角的量度單位，也是國際單位制導出單位。單位弧度定義為圓弧長度等於半徑時的圓心角。角度以弧度給出時，通常不寫弧度單位，或有時記為rad 。
- 弧度與角度的互化

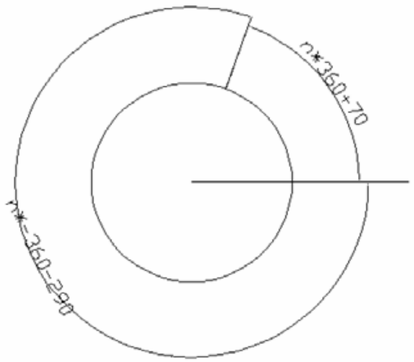
  弧度=角度*π/180

有向角與同界角

1. 有向角
逆時針為正向角，順時針為負向角



2. 同界角
有相同之始邊與終邊



3.最大負同界角與最小正同界角

設一角度爲θ，若α 爲θ 之正同界角中最小者，稱α 爲θ 之最小正同界角；若β 爲θ 之負同界角中最大者，稱β 爲θ 之最大負同界角。

例如：775°之最大負同界角與最小正同界角

775°=35°+360°×2，35°爲775°之最小正同界角

775°=-335°+360°×3，-335°爲775°之最大負同界角

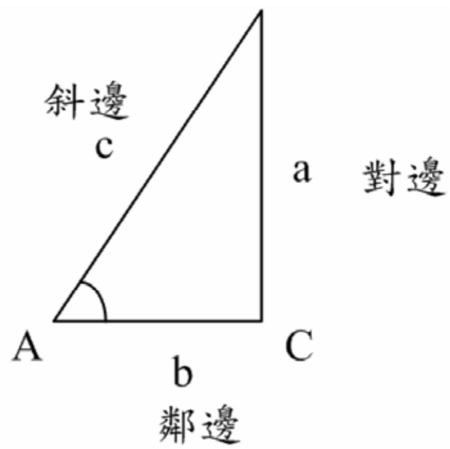
三角函數基本性質

■ 基本函數

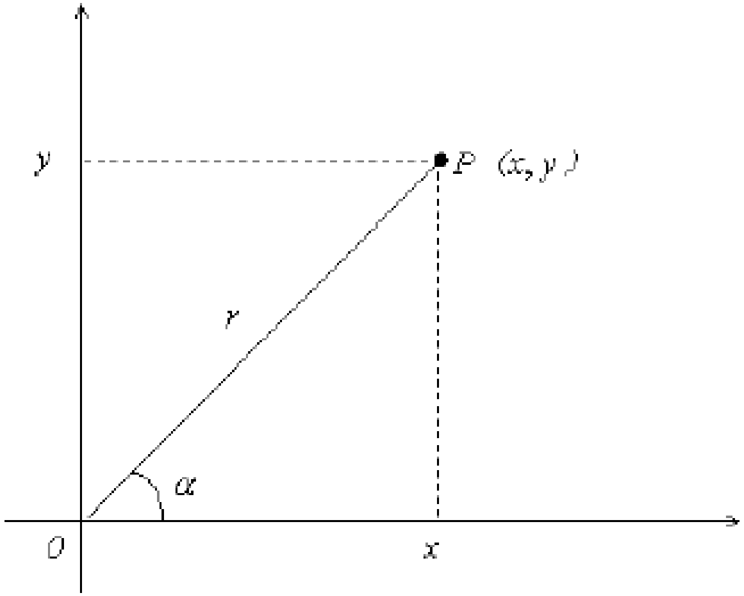
函數	數學符號	關係
正弦	sin	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\csc\theta}$
餘弦	cos	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sec\theta}$
正切	tan	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cot\theta}$
餘切	cot	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
正割	sec	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\theta}$
餘割	csc（或 cosec）	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sin\theta}$

銳角三角函數

- 在直角三角形中僅有銳角三角函數的定義
- 一個銳角的正弦是它的對邊與斜邊的比值。在圖中，sinA = 對邊/斜邊 = a/c。
- 一個銳角的餘弦是它的鄰邊與斜邊的比值。在圖中，cosA= 鄰邊/斜邊 = b/c。
- 一個銳角的正切是它的對邊與鄰邊的比值。在圖中，tanA = 對邊/鄰邊 = a/b。



廣義三角函數(角度可>180 °)



設 α 是平面直角坐標系 ***x-y*** 中的一個象限角，

P(x, y)是角的終邊上一點，$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$ 是

P 到原點 o 的距離，則 α 的六個三角函數定義

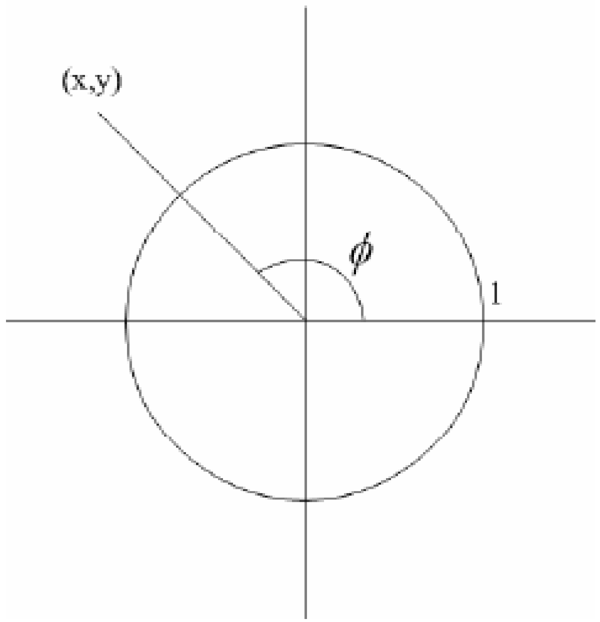
為：

函數名	定義	函數名	定義
正弦	$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	餘弦	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$
正切	$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	餘切	$\cot\alpha=\frac{x}{y}$
正割	$\sec\alpha=\frac{r}{x}$	餘割	$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

廣義三角函數

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\phi - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



當 $0 < \phi \leq 90^\circ$ 時，$0 < \sin\phi \leq 1$ 且 $0 \leq \cos\phi < 1$

當 $90^\circ < \phi \leq 180^\circ$ 時，$0 < \sin\phi \leq 1$ 且 $-1 \leq \cos\phi$

當 $180^\circ < \phi \leq 270^\circ$ 時，$-1 \leq \sin\phi < 0$ 且 $-1 \leq \cos\phi \leq 0$

當 $270^\circ < \phi \leq 360^\circ$ 時，$-1 < \sin\phi \leq 0$ 且 $0 < \cos\phi \leq 1$

角度的化簡原則

1. 凡是同界角均會有相同的三角函數值

   sin、cos 、tan 、cot 、sec 、csc (n*360° + θ)

   = sin、cos 、tan 、cot 、sec 、csc (θ)

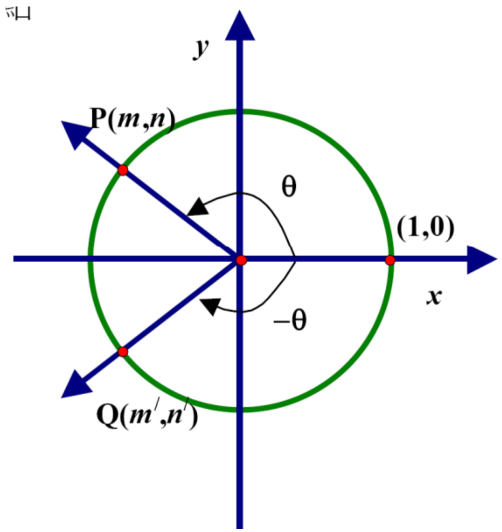
2. 負角三角函數值之變化原則

   a. sin、tan 、cot 、csc (-θ)

      = - sin、-tan 、-cot 、-csc (θ)

   b. cos 、sec (-θ)

      = cos 、sec (θ)



角度的化簡原則

3. 角180°±θ與360°±θ之三角函數值的變化

sin、cos 、tan 、cot 、sec 、csc (180°±θ, 360°∓θ)

=∓sin、-cos、±tan 、 ±cot 、-sec 、∓csc (θ)

$m=\cos\theta, n=\sin\theta$ ；$m'=\cos(180°+\theta), n'=\sin(180°+\theta)$

又因為P與Q對稱於O點

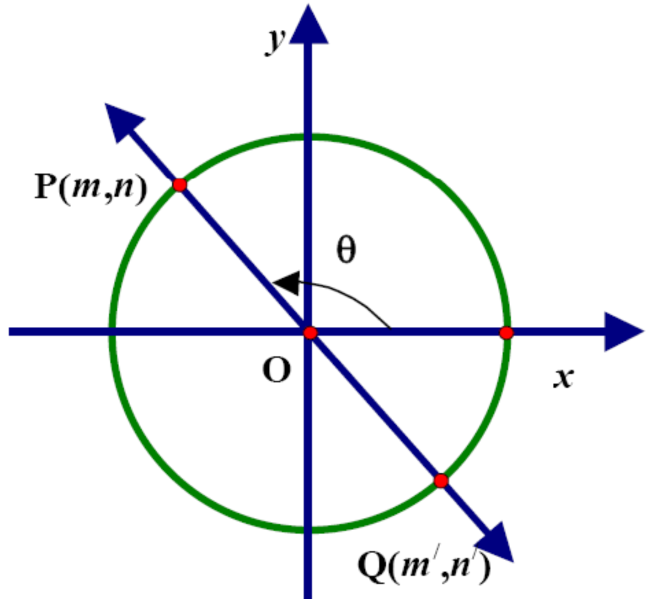
$\Rightarrow m'=-m, n'=-n$ 。

$\Rightarrow \cos(180°+\theta)=-\cos\theta$，$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$ 。

另外一方面，

$\cos(180°-\theta)=\cos(180°+(-\theta))=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$ 。

$\sin(180°-\theta)=\sin(180°+(-\theta))=-\sin(-\theta)=\sin\theta$ 。

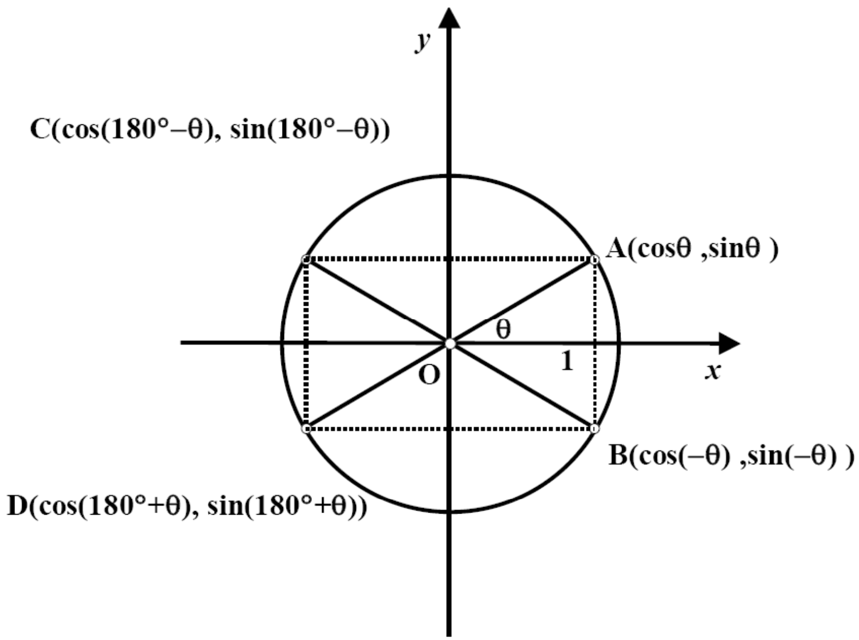


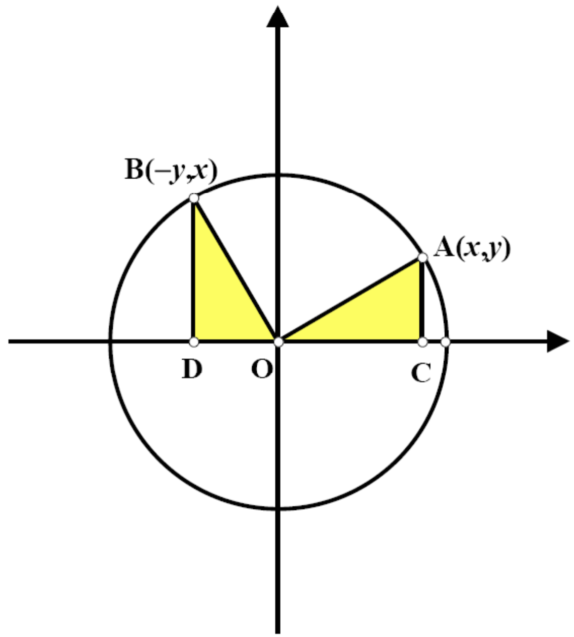
角度的化簡原則

4. 角90°±θ與270°±θ之三角函數值的變化

sin、cos、tan、cot、sec、csc (90°±θ, 270°±θ)

= cos、∓sin、∓cot、∓tan、∓csc、sec (θ)





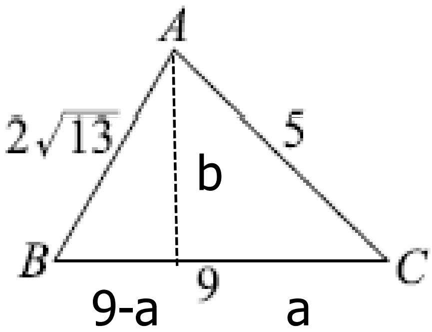
EX1.

θ 為銳角 ，若 $3\sin\theta = 4\cos\theta$，求 $\tan\theta + \cot\theta =$ ？

Ans: $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ ，$\cot\theta = \dfrac{3}{4}$ 　則 $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{25}{12}$ 。

EX2.

如右圖，$\angle B$ 為銳角 ，求 $\sin B = ?$



$(9-a)^2+b^2=(2\sqrt{13})^2$

$81-18a+a^2+b^2=52$

$a^2+b^2-18a+29=0$

$a^2+b^2=25$

$a^2+b^2 \quad -25=0$

$\Rightarrow a=54/18=3$

$b^2=25-a^2=16 \Rightarrow b=4$

$\sin B=4/(2\sqrt{13})=2/\sqrt{13}$

$=2\sqrt{13}/13$

Ans：$\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

EX3.

點(cot 320°, sec 320°)在第幾象限？若θ 非象限角，且 tanθ> 0，cosθ <0，則點(cosθ, sinθ)在第幾象限？

Ans:

(-,+)為第二象限角。

θ 為第三象限角 ∴(cosθ, sinθ) ⇒ (-,-)亦為第三象限角。

EX4.

sin 86°=a，試以 a 表示 sin 1976°。

Ans: $\sin 86^\circ = \cos 4^\circ$

$\sin 1976^\circ = \sin (5*360^\circ + 176^\circ) = \sin (90^\circ + 86^\circ) = \cos 86^\circ$

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \therefore \cos\theta = \sqrt{(1-\sin^2\theta)}$

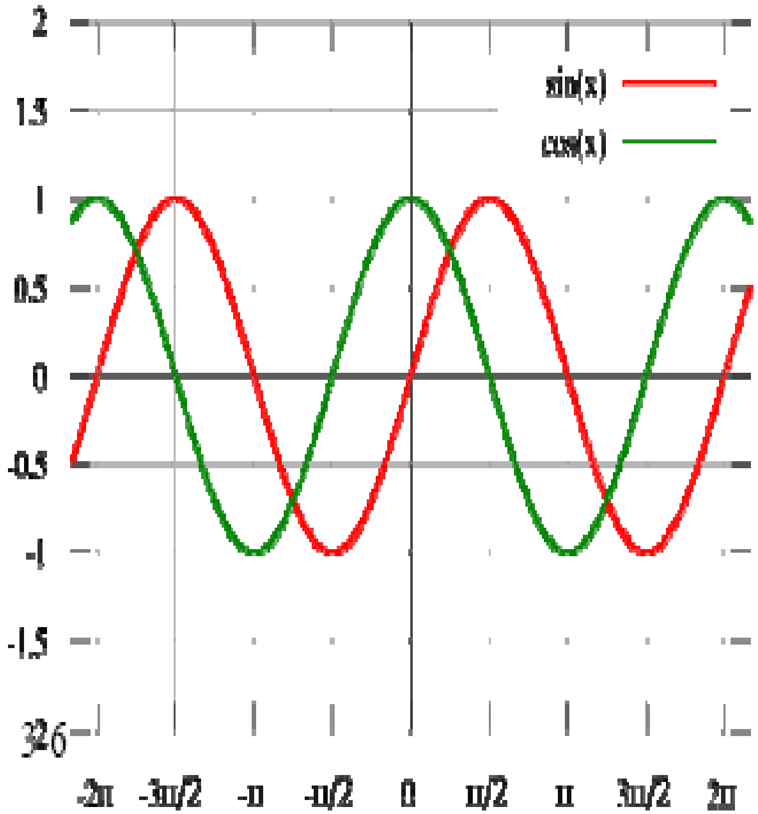
$\cos 86^\circ = \sqrt{(1-\sin^2 86^\circ)} = \sqrt{(1-a^2)}$

三角函數特性

- 三角函數週期圖形

三角函數為週期函數

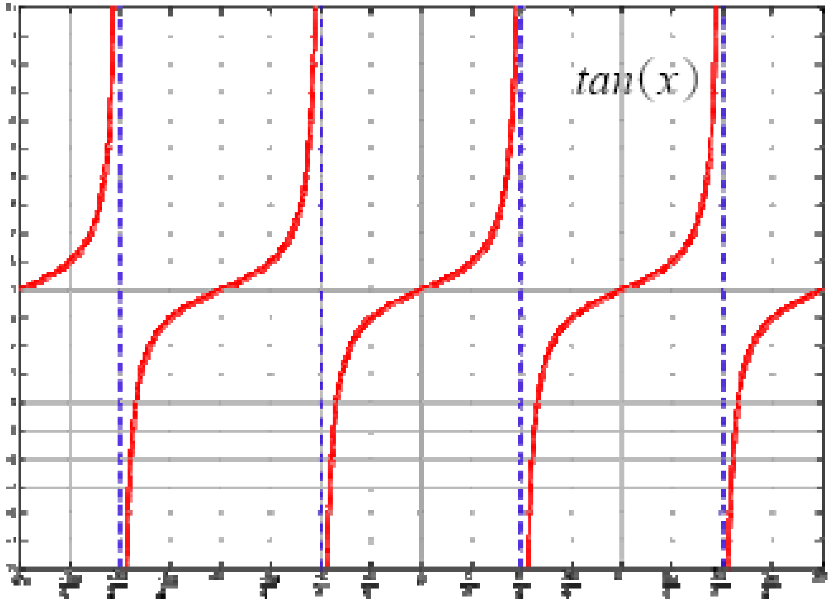
$\sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi)$
$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$



週期函數的最小正週期叫做這個函數的「基本週期」(primitive period)。正弦、餘弦、正割或餘割的基本週期是全圓，也就是 2π 弧度或 360 度；正切或餘切的基本週期是半圓，也就是 π 弧度或 180 度。上面只有正弦和餘弦是直接使用單位圓定義的，其他四個三角函數可以定義為：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



在正切函數的圖像中，在角 $k\pi$ 附近變化緩慢，而在接近角 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候變換迅速。正切函數的圖像在 $\theta=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 有垂直漸進線。這是因為在 θ 從左側接進 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候函數接近正無窮，而從右側接近 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候函數接近負無窮。

EX1.

下列各週期函數中，週期為 π 者有

(A) $y = |\sin x|$　(B) $y = \tan x$　(C) $y = \cot x$　(D) $y = \sec x$　(E) $y = \tan x + \cot x$

Ans：(A)(B)(C)(E)

複角三角函數

1. 複角公式（合、分角公式）:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

EX. $\sin 75^\circ = ?$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$$

■ 倍角公式

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ ；

註：$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ；$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

又 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ ；$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

EX. $\tan 120^\circ = ?$

$$\tan 120^\circ = \frac{2\tan 60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 4\sqrt{3}$$

■ 半角公式

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

cos 2x = 1-2sin^{2}x

➔sin x= √((1-cos 2x)/2)

➔sin (x/2)= √((1-cos x)/2)

cos 2x = 2cos^{2}x - 1

➔cos x= √((1+cos 2x)/2)

➔cos (x/2)= √((1+cos x)/2)

附註：設 $\tan\frac{x}{2}=t$，則 $\sin x=\frac{2t}{1-t^2}$；$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$；$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$.

EX. 假設 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，試求 $\sin(\frac{\alpha}{2})=?$

$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\frac{1}{2}$$

■ 和差化積、積化和差

1. 和差化積：

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

2. 積化和差：

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

和差化積、積化和差（證明與推導）

積化和差：

2 sinA*cosB, 2 cosA*sinB, 2 cosA*cosB, -2 sin A* sinB

sin (A+B) = sinA*cosB + cosA*sinB ….. (a)
sin (A-B) = sinA*cosB - cosA*sinB ……. (b)
(a)+(b) .. sin (A+B) + sin(A-B)= 2 sinA*cosB
(a)-(b) .. sin (A+B) - sin(A-B)= 2 cosA*sinB

cos (A+B) = cosA*cosB - sinA*sinB ….. (a)
cos (A-B) = cosA*cosB + sinA*sinB …. (b)
(a)+(b) .. cos (A+B) + cos(A-B)= 2 cosA*cosB
(a)-(b) .. cos (A+B) - cos(A-B)= -2 sin A* sinB

和差化積、積化和差（證明與推導）

和差化積:

sin A+sin B, sin A-sin B, cosA+cosB, cosA-cosB

設A=X+Y, B=X-Y ➔ X=(A+B)/2, Y=(A-B)/2

sin A+sin B= sin(X+Y)+sin(X-Y)

=2 sin(X)cos(Y)

=2 sin((A+B)/2)*cos((A-B)/2)

sin A-sin B = sin(X+Y)-sin(X-Y)

=2 cos(X)sin(Y)

=2 cos((A+B)/2)*sin((A-B)/2

和差化積、積化和差（證明與推導）

和差化積:

$$\cos A+\cos B = \cos(X+Y)+\cos(X-Y)$$
$$=2 \sin(X)\cos(Y)$$
$$=2 \cos((A+B)/2)*\cos((A-B)/2)$$

$$\cos A-\cos B = \cos(X+Y)-\cos(X-Y)$$
$$=-2\sin(X)\sin(Y)$$
$$=-2 \sin((A+B)/2)*\sin((A-B)/2)$$